Тәжірибелік сабақ

Тақырып 5. Векторлардың векторлық көбейтіндісі, аралас көбейтіндісі және олардың геометрия мен механика салаларындағы қолданулары. Қасиеттері.

1. **a** = (1, 3, 1), **b** = (-2, 4, -1), **c** = (2, 4, -6) векторлары берілген. Берілген векторлар компланар ма, компланар емес болған жағдайда олар қандай үштік (оң немесе сол) құрайды және осы векторлардан тұрғызылған параллелипипедтің көлемін тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a\,bc} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0.$$

Векторлардың аралас көбейтіндісінен олар компланар емес және сол үштік құрайтынын көреміз, ал V = 78.

2. **a** = 2**i** +3**j**, **b** = **i** -4**j** векторларынан құрылған параллелограммның ауданын тап. Мұндағы **i** (1, 0), **j**(0, 1)- бірлік векторлар және өзара перпендикуляр векторлар.

Шешуі:

a*b = (2**i** +3**j**)*(**i** -4**j**) = 2**i*** **i** +3**j*****i** -8 **i** ***j**-12**j*****j** = -3**i** ***j**-8**i** ***j** = -11**i** ***j** = **c**;
Sпар. = |**c**| = 11|**i*j**| = 11*1*1Sinπ /2 = 11.

3. **a** = (0, 1, 0) және **b** = (2, -1, 3) векторлары берілген. Осы векторлардың векторлық көбейтіндісі мен векторлық көбейтіндісінен пайда болған вектордың ұзындығын тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{к} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{к} = \mathbf{c}$$

c(3, 0, -2), |**c**| = | **a** ***b**| = √9+0+4 = √13.

4. $\vec{a} = \{7,4,6\}$, $\vec{b} = \{2,1,1\}$, $\vec{c} = \{19,11,17\}$ векторлары берілген. Олар компланар болады ма?

*Шешуі***.** Үш вектордың аралас көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 119 + 76 + 132 - 114 - 136 - 77 = 327 - 327 = 0$$

Жауабы: $\vec{a}, \vec{b}$ және $\vec{c}$ векторлары компланар.

5. A_1 (1, -1, 2), A_2 (2, 1, 2), A_3 (1, 1, 4), A_4 (6, -3 , 8) нүктелері берілген. Төбелері A_1, A_2, A_3, A_4 нүктелерінде орналасқан тетраэдрдің көлемін және A_4 нүктесінен A_1 A_2 A_3 жағына түсірілген биіктікті табыңыз.

Шешуі: $V_{A_1A_2A_3A_4} = \pm\frac{1}{6}\left(\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}\ \overline{A_1A_4}\right)$

$$\overline{A_1A_2} = \{2-1,\ 1-(-1),\ 2-2\} = \{1,\ 2,\ 0\}$$
$$\overline{A_1A_3} = \{1-1,\ 1-(-1),\ 4-2\} = \{0,\ 2,\ 2\}$$
$$\overline{A_1A_4} = \{6-1,\ -3-(-1),\ 8-2\} = \{5,\ -2,\ 6\}$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 5 & -2 & 6\end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left|6+10+2\right| = \frac{1}{3}\cdot 18 = 6 \quad \text{(куб. бір.)}$$

Енді тетраэдр көлемін есептеудің $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot h_{A_4}$ белгілі формуласын қолданып, биіктігін есептейміз.

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\left\{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right\}\right| = \frac{1}{2}\left|\{4,-2,2\}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\left|\{2,-1,1\}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot h_{A_4} = 6 \Rightarrow h_{A_4} = \frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{6} = 3\sqrt{6} \quad \text{(бірлік.)}$$

Жауабы: биіктігі $3\sqrt{6}$ (бірлік).

6. Пирамиданың төбелері берілген: $A(1,\ 2,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(2,5,2)$, $D(3,0,-2)$.

Табу керек:

1. BAC бұрышын.
2. ABC үшбұрышының ауданын.
3. Пирамида көлемін.

Шешуі:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ векторларын табалық:

$\overline{AB} = (0-1,\ -1-2,\ 1-3) = (-1,-3,-2)$, $\overline{AC} = (1,3,-1)$, $\overline{AD} = (2,-2,-5)$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|} = \frac{-1\cdot 1 + (-3)\cdot 3 + (-2)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{-8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{11}}.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-3 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\cdot\bar{k} = 9\bar{i} - 3\bar{j} = (9,-3,0).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{81+9} = \frac{9\sqrt{10}}{2}.$$

3. $$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix}-1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & -5\end{vmatrix} = 24.$$

$$V_{пир.} = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$$

7. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{3\pi}{4}$. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларынан тұрғызылған параллелограммның ауданын табыңыз.

Шешуі. $S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\wedge\vec{b})=|\vec{a}\times\vec{b}|$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|(3\vec{p}+2\vec{q})\times(2\vec{p}-\vec{q})|=|3\vec{p}\times 2\vec{p}+2\vec{q}\times 2\vec{p}-3\vec{p}\times\vec{q}-2\vec{q}\times\vec{q}|=$$

$$=|4\vec{q}\times\vec{p}+3\vec{q}\times\vec{p}|=7|\vec{q}\times\vec{p}|=7|\vec{q}||\vec{p}|\sin(\vec{p},\wedge\vec{q})=7\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=42\sqrt{2}\quad (\textit{шаршы. бір})$$

Жауабы: параллелограмм ауданы $42\sqrt{2}$ (шаршы. бір.)

8. Келесі есептерді өз беттеріңмен шығарыңдар

1. A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(4, 3, 2) төбелерінің координаталарымен берілген ABC үшбұрышының ауданын тап. (Жауабы: $2\sqrt{6}$).
2. $|\mathbf{a}|=10$, $|\mathbf{b}|=2$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=12$ берілген. $|\,\mathbf{ab}\,|$ есепте. (Жауабы: 16).
3. Материалық нүктені A (-1, 2, 0) нүктесінен B (2, 1, 3) нүктесіне қозғалту кезінде істелінген $\mathbf{F}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ күшінің жұмысын тап. (Жауабы: 4).
4. **x** векторы $\mathbf{a}_1$ (2, 3, -1) және $\mathbf{a}_2$ (1, -2, 3) векторларына перпендикуляр және мына теңдікті қанағаттандырады $\mathbf{x}\,(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=-6$. **x** векторының координатасын тап.
(Жауабы : **x** (-3, 3, 3)).
5. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ векторлары оң үштікті құрайды және өзара перпендикуляр, $|\mathbf{a}_1|=4$, $|\mathbf{a}_2|=2$, $|\mathbf{a}_3|=3$. $\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3$ есепте. (Жауабы: 24).
6. **a** (0, 3, 4), **b** (2, 1, 3) векторлары берілген және $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\varphi=\pi/4$. $пр_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ есепте. (Жауабы: $5\sqrt{2}/2$).